

1. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, BD 是 $\odot O$ 的弦, 延长 BD 到点 C, 使 $DC=BD$, 连接 AC, 过点 D 作 $DE \perp AC$, 垂足为 E.

(1) 求证: DE 为 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 5, $\angle BAC=60^\circ$, 求 DE 的长.

(1) 证明: 如图, 连接 OD.

$$\because OA=OB, CD=BD,$$

$$\therefore OD \parallel AC.$$

$$\therefore \angle ODE = \angle CED.$$

$$\text{又} \because DE \perp AC,$$

$$\therefore \angle CED = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ODE = 90^\circ, \text{即 } OD \perp DE.$$

\therefore DE 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 解: $\because OD \parallel AC, \angle BAC=60^\circ,$

$$\therefore \angle BOD = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\angle C = \angle ODB.$$

$$\text{又} \because OB=OD,$$

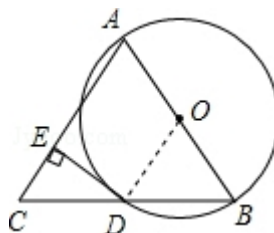
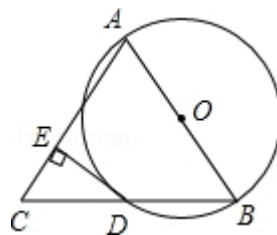
$\therefore \triangle BOD$ 是等边三角形.

$$\therefore \angle C = \angle ODB = 60^\circ,$$

$$CD=BD=5.$$

$$\because DE \perp AC,$$

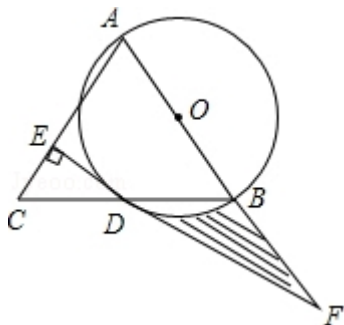
$$\therefore DE = CD \cdot \sin \angle C = 5 \times \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$



2. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 延长弦 BD 到点 C, 使 $DC=BD$, 连接 AC, 过点 D 作 $DE \perp AC$, 垂足为 E.

(1) 判断直线 DE 与 $\odot O$ 的位置关系, 并证明你的结论;

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 6, $\angle BAC=60^\circ$, 延长 ED 交 AB 延长线于点 F, 求阴影部分的面积.



【解】 (1) 直线 DE 与 $\odot O$ 的位置关系是相切,

证明：连接 OD，

$$\because AO=BO, BD=DC,$$

$$\therefore OD \parallel AC,$$

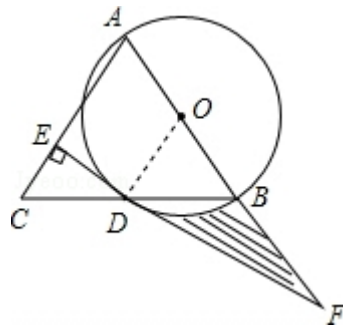
$$\because DE \perp AC,$$

$$\therefore DE \perp OD,$$

$$\because OD \text{ 为半径},$$

直线 DE 是 $\odot O$ 的切线，

即直线 DE 与 $\odot O$ 的位置关系是相切；



$$(2) \text{ 解: } \because OD \parallel AC, \angle BAC=60^\circ,$$

$$\therefore \angle DOB = \angle A = 60^\circ,$$

$$\because DE \text{ 是 } \odot O \text{ 切线},$$

$$\therefore \angle ODF = 90^\circ,$$

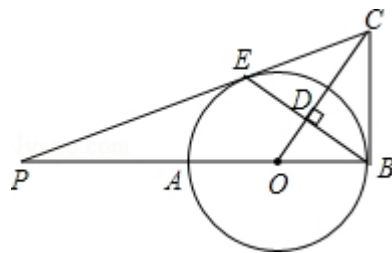
$$\therefore \angle F = 30^\circ,$$

$$\therefore FO = 2OD = 12,$$

$$\text{由勾股定理得: } DF = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积 } S = S_{\triangle ODF} - S_{\text{扇形 } DOB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} - \frac{60\pi \times 6^2}{360} = 18\sqrt{3} - 6\pi.$$

3. 如图所示，在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中， $\angle OBC=90^\circ$ ，以 O 为圆心，OB 为半径的 $\odot O$ 交 BO 的延长线于 A， $BD \perp OC$ 于 D，交 $\odot O$ 于 E，连接 CE 并延长交直线 AB 于 P。



(1) 求证：CE 是 $\odot O$ 的切线。

(2) 若 $CE = \frac{20}{3}$ ， $\odot O$ 的半径为 5，求 PE 的长？

(1) 证明：连接 EO，

$$\therefore \triangle EOB \text{ 为等腰三角形},$$

$$\because BD \perp OC \text{ 于 } D,$$

$$\therefore \angle DOB = \angle DOE,$$

$$\therefore \triangle CEO \cong \triangle CBO,$$

$$\because \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\therefore OE \perp PC,$$

$$\therefore CE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}.$$

(2) 解： $\because OE \perp PC, \angle OBC = 90^\circ,$

$$\therefore BC=BP$$

(2) 连接 OA、OE、CE，如下图②所示

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle DEC=90^\circ,$$

又 BC 与 $\odot O$ 相切于点 C ，

$$\therefore \angle DEC=\angle OCB=90^\circ,$$

$$\text{又 } \angle 4=\angle 6$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle OCB,$$

$$\therefore \frac{DE}{OC} = \frac{DC}{OB}$$

$$\therefore DE \cdot OB = OC \cdot DC = 40$$

$$\therefore DC=2OC$$

$$OC^2=20, \quad OC=2\sqrt{5},$$

$$\because \text{又 } \angle 1=\angle 2, \quad \angle 3=\angle 4,$$

$$\therefore \angle 1+\angle 4=90^\circ,$$

$$\text{又 } \angle 1+\angle 5=90^\circ,$$

$$\therefore \angle 4=\angle 5$$

$$\therefore \triangle ADO \sim \triangle OCB$$

$$\therefore \frac{AD}{OC} = \frac{OD}{BC}$$

$$\therefore AD \cdot BC = OC \cdot OD = OC^2 = 20$$

$$\text{即: } AD \cdot BC = 20$$

(3) $\because AD$ 、 BC 分别与 $\odot O$ 相切于点 D 、 C ，如图②所示，

$$\therefore CD \perp AD, \quad CD \perp PC,$$

$$\therefore AD \parallel PB$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BPE$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BPE}} = \frac{AD^2}{BP^2} = \frac{16}{25},$$

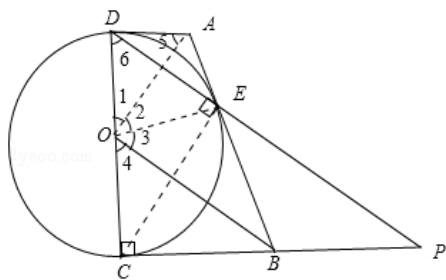
$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{AD}{BP} = \frac{4}{5},$$

$$\text{即: } AD = \frac{4}{5}BC = \frac{4}{5}BP$$

$$\text{又 } \because AD \cdot BC = 20$$

$$\therefore BC^2 = 25$$

$$\text{即: } BC = 5$$



图②

$$\therefore S_{\text{四边形} ABCD} = \frac{1}{2} (AD+BC) \cdot 2OC$$

$$= OC (AD+BP)$$

$$= 2\sqrt{5} \cdot \frac{9}{5} BC$$

$$= 2\sqrt{5} \times \frac{9}{5} \times 5$$

$$= 18\sqrt{5}$$

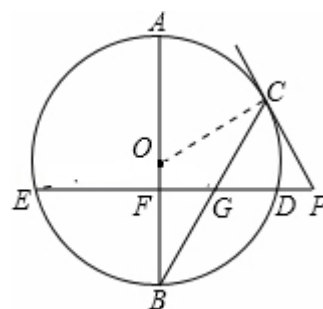
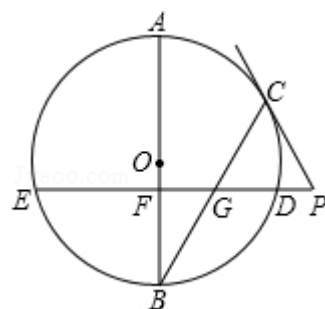
即：四边形 ABCD 的面积为 $18\sqrt{5}$

5. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 直径，BC 是 $\odot O$ 的弦，弦 ED \perp AB 于点 F，交 BC 于点 G，过点 C 作 $\odot O$ 的切线与 ED 的延长线交于点 P.

(1) 求证：PC=PG;

(2) 点 C 在劣弧 AD 上运动时，其他条件不变，若点 G 是 BC 的中点，试探究 CG、BF、BO 三者之间的数量关系，并写出证明过程;

(3) 在满足 (2) 的条件下，已知 $\odot O$ 的半径为 5，若点 O 到 BC 的距离为 $\sqrt{5}$ 时，求弦 ED 的长.



【解】 (1) 证明：连结 OC，如图，

\because PC 为 $\odot O$ 的切线，

$\therefore OC \perp PC$ ，

$\therefore \angle OCG + \angle PCG = 90^\circ$ ，

$\because ED \perp AB$ ，

$\therefore \angle B + \angle BGF = 90^\circ$ ，

$\because OB = OC$ ，

$\therefore \angle B = \angle OCG$ ，

$\therefore \angle PCG = \angle BGF$ ，

而 $\angle BGF = \angle PGC$ ，

$\therefore \angle PGC = \angle PCG$ ，

$\therefore PC = PG$;

(2) 解：CG、BF、BO 三者之间的数量关系为 $CG^2 = BO \cdot BF$ 。理由如下：

连结 OG，如图，

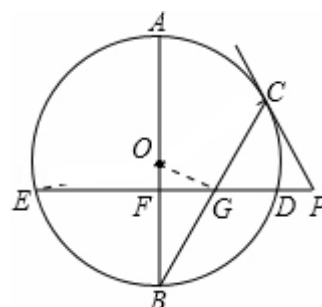
\because 点 G 是 BC 的中点，

$\therefore OG \perp BC$ ， $BG = CG$ ，

$\therefore \angle OGB = 90^\circ$ ，

$\because \angle OBG = \angle GBF$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle BOG \sim \text{Rt}\triangle BGF$ ，



$$\therefore BG: BF=BO: BG,$$

$$\therefore BG^2=BO \cdot BF,$$

$$\therefore CG^2=BO \cdot BF;$$

(3) 解: 连结 OE, 如图,

由(2)得 $OG \perp BC$,

$$\therefore OG=\sqrt{5},$$

在 $Rt\triangle OBG$ 中, $OB=5$,

$$\therefore BG=\sqrt{OB^2 - OG^2}=2\sqrt{5},$$

由(2)得 $BG^2=BO \cdot BF$,

$$\therefore BF=\frac{20}{5}=4,$$

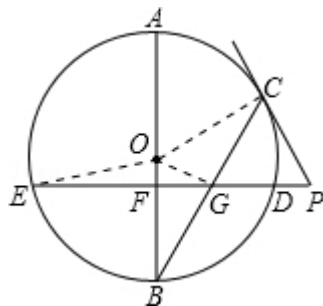
$$\therefore OF=1,$$

在 $Rt\triangle OEF$ 中, $EF=\sqrt{OE^2 - OF^2}=2\sqrt{6},$

$$\therefore AB \perp ED,$$

$$\therefore EF=DF,$$

$$\therefore DE=2EF=4\sqrt{6}.$$

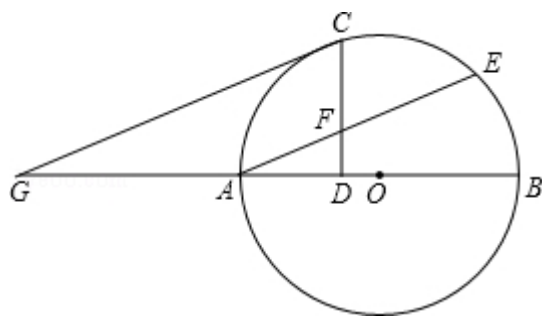


6.如图所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, AE 是弦, C 是劣弧 AE 的中点, 过 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , CD 交 AE 于点 F , 过 C 作 $CG \parallel AE$ 交 BA 的延长线于点 G .

(1) 求证: CG 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 求证: $AF=CF$.

(3) 若 $\angle EAB=30^\circ$, $CF=2$, 求 GA 的长.



【解】(1) 证明: 连结 OC , 如图,

$\because C$ 是劣弧 AE 的中点,

$$\therefore OC \perp AE,$$

$$\because CG \parallel AE,$$

$$\therefore CG \perp OC,$$

$\therefore CG$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 证明: 连结 AC 、 BC ,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB=90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle BCD=90^\circ,$$

而 $CD \perp AB$,

$$\therefore \angle B + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle 2,$$

$\because C$ 是劣弧 AE 的中点,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{CE},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle B,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore AF = CF;$$

(3) 解: 在 $Rt\triangle ADF$ 中, $\angle DAF = 30^\circ$, $FA = FC = 2$,

$$\therefore DF = \frac{1}{2}AF = 1,$$

$$\therefore AD = \sqrt{3}DF = \sqrt{3},$$

$$\because AF \parallel CG,$$

$$\therefore DA : AG = DF : CF, \text{ 即 } \sqrt{3} : AG = 1 : 2,$$

$$\therefore AG = 2\sqrt{3}.$$

